Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

## Diferenciálna rovnica

Diferenciálna rovnica je rovnica, ktorá obsahuje okrem konštánt, premenných a funkcií, aj derivácie funkcií. Rád diferenciálnej rovnice určujeme podľa najvyššieho rádu derivácie funkcie v rovnici.

Diferenciálnu rovnicu vieme zapísať v tvare:

,

kde je rád derivácie (a teda aj diferenciálnej rovnice), je premenná a je funkcia premennej.

Poznáme viacero typov diferenciálnych rovníc, nás budú zaujímať iba obyčajné diferenciálne rovnice (ODR), čo sú rovnice, ktoré obsahujú derivácie iba jednej premennej.

V počítačovej animácii sa diferenciálne rovnice používajú pri animovaní pohybu častíc. Poznáme polohu častice v čase a diferenciálnu rovnicu , kde je pozícia a  je čas, ktorá modeluje pohyb častíc.

Na riešenie ODR sa používajú:

1. **Explicitné metódy:**
   1. Eulerova dopredná metóda
   2. Mid Point metóda
   3. Runge Kutta metóda
2. **Implicitné metódy:** 
   1. Implicitná Eulerova metóda

V nasledujúcich častiach bližšie opíšeme explicitné metódy.

## Eulerova (explicitná / dopredná) metóda

Eulerova explicitná metóda vychádza z toho, že máme zadanú pozíciu častice v čase , t.j. , a využitím Taylorovho rozvoja vieme nájsť pozíciu v čase , t.j. :

Posúvame sa teda po dotyčniciach krivky v daných bodoch. Numericky pohyb častice vieme vypočítať pomocou vzťahu:

ak máme zadané , t.j. počiatočnú polohu častice.

Výhodou Eulerovej explicitnej metódy je to, že je veľmi jednoduchá, rýchla a ľahká na implementáciu, problémom je veľká chyba - pre jeden krok. V každom ďalšom kroku máme chybu aj z predchádzajúcich krokov, takže chyba sa kumuluje a z toho dôvodu môže byť táto metóda nestabilná. Zlepšením môže byť voľba pomerne malého .

## MidPoint metóda

Myšlienka MidPoint metódy je podobná ako explicitnej Eulerovskej metódy. Tiež sa posúvame po krokoch, ale používame iba približnú deriváciu a to: . Zase používame Taylorov rozvoj a algoritmus môžeme zapísať pomocou vzťahu:

Numericky to vieme zapísať ako:

Výhody sú podobné ako pri explicitnej Eulerovej metóde – jednoduchosť, rýchlosť a ľahká implementácia. Chyba MidPoint metódy je menšia ako pri Eulerovej metóde - Nevýhodou je viac výpočtov, keďže musíme v každom kroku počítať dvakrát.

## Runge-Kutta metóda

Pri Runge-Kutta metóde 4. rádu musíme, ako už z názvu vyplýva, vypočítať najprv 4 kroky:

Následne dostávame pozíciu častice v čase :

Výhodou je veľmi malá chyba jedného kroku riešenia – iba , nevýhodou tejto metódy je ale veľa počítania v každom kroku.

## Podmienky stability na voľby časového kroku

Stabilitu môžeme testovať pomocou tzv. lineárnej testovacej rovnice:

kde . Rovnica je stabilná ak .

Eulerova explicitná metóda je stabilná, ak .

Runge-Kutta metóda je stabilná, ak .

## Sily odozvy

Pri časticiach rozlišujeme niekoľko dynamických vlastností:

* Hmotnosť () – parameter
* Pozíciu () –
* Rýchlosť () –
* Hybnosť () –
* Zrýchlenie () –
* Silu () –

Newtonova dynamika sa riadi troma základnými Newtonovými zákonmi pohybu:

1. **Zákon zotrvačnosti:** „Každý hmotný bod zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, kým nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.“
2. **Zákon sily:** „V [inerciálnej vzťažnej sústave](https://sk.wikipedia.org/wiki/Inerci%C3%A1lna_vz%C5%A5a%C5%BEn%C3%A1_s%C3%BAstava) sa výsledná sila pôsobiaca na [hmotný bod](https://sk.wikipedia.org/wiki/Hmotn%C3%BD_bod)rovná prvej [derivácii](https://sk.wikipedia.org/wiki/Deriv%C3%A1cia_(funkcia)) hybnosti hmotného bodu podľa času.“
3. **Zákon akcie a reakcie**: „Dva hmotné body na seba pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru, ktoré súčasne vznikajú a súčasne zanikajú“

Na animáciu časticového systému musíme v každom kroku:

1. Vyrátať novú pozíciu pre každú časticu (využitím napr. niektorej z metód v predchádzajúcich podkapitolách).
2. Následne detekovať kolízie medzi časticami.
3. Vypočítať silu odozvy pre každú kolíziu.
4. A využitím zákona akcie a reakcie distribuovať silu odozvy na častice v kolízii.

Pri kolízii dvoch častíc sa využíva Newtonov model:

kde je relatívne normálna rýchlosť pred kolíziou, je relatívne normálna rýchlosť po kolízii. je koeficient obnovy (predchádzajúceho stavu). Pri plastických kolíziách je , pri elastických kolíziách .

Kolízny rozklad sily na základe impulzu vypočítame ako integrál odpudivých síl počas kolízie: